# Типы задач по исчислению предикатов 1-го порядка

1. Перевести на язык исчисления предикатов утверждение: «все кошки одного цвета».

 ,

Где *Cat* – одноместный (унарный) предикатный символ. Соответствующий предикат истинен для всех кошек (т.е., на содержательном языке «*x* есть кошка»),

*EqColor* – бинарный предикатный символ. Соответствующий предикат истинен тогда и только тогда, когда *x* и *y* имеют один и тот же цвет.

2. На языке исчисления предикатов запишите в виде формулы следующий силлогизм:

1) Все люди смертны

2) Кай – человек

3) Следовательно, Кай смертен.

Записывается так:



Это частный случай схемы (4), где терм t есть константа (имя собственное Кай). ЧЕЛОВЕК и СМЕРТЕН – унарные предикатные символы.

3. В записанной ниже формуле определить, свободен ли терм  для этих переменных:



Говорят, что терм *t* свободен для переменной *x* в формуле *F*, если ни одно свободное вхождение переменной *x* в *F* не находится в области действия квантора по переменной, входящей в терм *t*.

В частности, это всегда выполняется для замкнутого терма, то есть не содержащего переменных (константы, например) и для терма, совпадающего с переменной.

Условимся обозначать это так:  - предикат арности 3 в метаязыке.

В нашем случае анализируем по очереди все переменные.

Свободных вхождений переменной  в нашей формуле нет, и поэтому условие для нее тривиально выполняется.

Свободное вхождение переменной находится в посылке импликации, но оно попадает в область действия квантора по переменной , которая входит в терм. Следовательно,

.

Все вхождения переменной  в формулу свободны, но все они находятся в области действия квантора по переменной, входящей в терм, и, следовательно, условие не выполняется и для этой переменной.

4. Дана формула , где P – бинарный предикатный символ.

Придумать две интерпретации: в одной формула истинна, а в другой невыполнима.

Первая интерпретация: предметная область (область интерпретации) – множество натуральных чисел, а символу P сопоставлено предикат «строго больше», то есть . Очевидно, что тогда формула истинна, так как действительно для каждого натурального числа существует число, строго большее его.

Мы получим невыполнимую формулу для той же предметной области, просто поменяв в предикате знак строгого неравенства на противоположный.

В задаче такого типа возможны любые комбинации двух кванторов (всего 4).

5. Доказать в исчислении предикатов формулу:

1. ├ (∀x1)(A 🡪 B) 🡪 ((∀x1)A 🡪 (∀x1)B)
2. (∀x1)(A 🡪 B) – гипотеза
3. (∀x1)A – гипотеза
4. (∀x1)(A 🡪 B) 🡪 (A 🡪 B) – схема (4) при t = x1
5. A 🡪 B – MP, (1) и (3)
6. (∀x1)( (∀x1)A 🡪 B) 🡪 ((∀x1)A 🡪 (∀x1)B) – схема (5) (формула (∀x1)A не содержит свободных вхождений переменной x1)
7. (∀x1)A 🡪 A – схема (4)
8. (∀x1)A 🡪 B – секвенция (1); (6) и (4)
9. (∀x1)( (∀x1)A 🡪 B) – Gen, (7)
10. (∀x1)A 🡪 (∀x1)B – MP, (5) и (8)
11. (∀x1)B – MP, (2) и (9)

Теорема дедукции применима, так как применение правила обобщения в построенном выводе не связывает свободное вхождение переменной ни в одной из гипотез.